LATVIJAS BANKA

ISBN 9984–676–56–0

VIKTORS AJEVSKIS
KRISTĪNE VĪTOLA

PROCENTU LIKMJU TERMIŅSTRUKTŪRAS KONVERĢENCES MODELIS

PĒTĪJUMS
1 • 2009

SATURS

SAĪSINĀJUMI

BEF – Beļģijas franks
DEM – Vācijas marka
EMS – Ekonomikas un monetārā savienība
ES – Eiropas Savienība
ESP – Spānijas peseta
FIM – Somijas marka
FRF – Francijas franks
ITL – Itālijas lira
NLG – Nīderlandes guldenis

KOPSAVILKUMS

Pētījumā izstrādāts procentu likmju termiņstruktūras konverģences modelis saistībā ar pievienošanos EMS. Salīdzinājumā ar citiem šajā jomā līdz šim izveidotajiem modeļiem modeļa specifikācija nodrošina iekšzemes īstermiņa procentu likmju konverģenci ar atbilstošajām eiro zonas procentu likmēm. Šāda konverģence panākta, pieņemot, ka iekšzemes un eiro zonas īstermiņa procentu likmju starpības dinamika atbilst Brauna tilta procesam. Izstrādāts arī teorētiskajam modelim atbilstošs ekonometriskais modelis. Lai risinātu modeļa nestacionaritātes un nelinearitātes problēmu, koeficientu novērtēšanā izmantota paplašinātā Kalmana filtra pieeja.

Atslēgvārdi: procentu likmju termiņstruktūra, Brauna tilts, EMS, nelineārais Kalmana filtrs.

JEL klasifikācija: E43, F36, G12, G15

Pētījumā izteiktie secinājumi atspoguļo autoru – Latvijas Bankas Monetārās politikas pārvaldes darbinieku –viedokli, un autori uzņemas atbildību par iespējamām pieļautajām neprecizitātēm.

Autori izsaka pateicību Jesperam Lundam *(Jesper Lund)* par sniegtajiem datiem.

IEVADS

Pēdējos gados ES pievienojies 12 jaunu valstu.[1] Tām visām izvirzītas prasības pievienoties EMS un ieviest eiro kā nacionālo valūtu.[2] Svarīgi, lai to valstu, kuras gatavojas pilntiesīgai dalībai EMS, centrālās bankas izstrādātu finanšu aktīvu cenu modeļus, jo uz šādu modeļu bāzes būs iespējams novērtēt tirgus dalībnieku gaidas attiecībā uz dažādām nākotnes norisēm, piemēram, plānoto laiku, kad pievienoties eiro zonai, vai varbūtību pilntiesīgai dalībai EMS ar noteiktu datumu. Finanšu tirgus dalībnieki varētu izmantot šādus modeļus kā aktīvu cenu pareizas novērtēšanas instrumentus.

Starptautiskajos termiņstruktūras modeļos dažādu valstu ienesīguma starpību nosaka valūtas kursa risks. Pēc pievienošanās EMS iekšzemes un eiro zonas valdības obligāciju ienesīguma starpībai vajadzētu izzust.[3] Valsts pievienošanās eiro zonai nākotnē noteikti ietekmē finanšu aktīvu cenas. Visu laiku, kamēr vien par šo norisi ir nenoteiktība, tā atspoguļosies procentu likmju termiņstruktūrā.

Jespers Lunds savā pētījumā analizē plānotas dalības EMS ietekmi uz potenciālo dalībvalstu iekšzemes ienesīguma līkni.(13) Interesantākās problēmas rodas gadījumā, kad nav skaidrības par monetārās savienības dalībvalstīm vai sākotnējo iespējamo pievienošanās datumu (vai abiem faktoriem), un tieši šādam gadījumam J. Lunds pievērš lielāko uzmanību.

J. Lunds izveidojis starptautisku termiņstruktūras modeli, kurā iekļauj pievienošanās EMS plānus, ierosinot īpašu novērtēšanas metodi un izdarot empīriskus secinājumus. J. Lunda izveidotajā modelī kādas valsts EMS pievienošanās laiks ir gadījumrakstura mainīgais. Empīriskajā analīzē, izmantojot procentu likmju datus, J. Lunds izmanto šo īpašību, lai novērtētu tirgus noteiktu pievienošanās EMS varbūtību katrai ES valstij. Pauls De Grauve *(De Grauwe, Paul)* (4) un Karlo Ambrodžo Favero u.c. *(Favero, Carlo Ambrogio et al.)* (7) aplūko līdzīgas idejas. Deivids S. Beitss *(Bates, David S.)* (3) sniedz literatūras apskatu un pievienošanās EMS varbūtības dažādu novērtējuma metožu detalizētu salīdzinājumu.

Lai raksturotu iekšzemes un eiro zonas īstermiņa procentu likmju starpības dinamiku reālas varbūtības apstākļos, J. Lunds izmanto Vasičeka (Ornšteina–Ūlenbeka *(Ornstein-Uhlenbeck*)) standarta procesu, papildinot neitrāla riska procesu ar jaunu faktoru – stohastisko riska cenu, kam arī piemēro Vasičeka procesu.

Nav grūti pierādīt, ka, lai izvairītos no arbitrāžas iespējas, līdz brīdim, kad notiek pievienošanās eiro zonai, īstermiņa procentu likmju starpībai jātuvojas nullei. J. Lunda specifikācija nenodrošina šā nosacījuma izpildi. Pētījumā izveidots procentu likmju termiņstruktūras modelis valstij, kas pievienosies eiro zonai nākotnē. Īstermiņa procentu likmju starpības dinamikas specifikācija noteikta ar Brauna tilta procesu.(14; 15) Šim stohastiskajam procesam piemīt īpašība noteiktā

[1] Čehijas Republika, Igaunija, Kipra, Latvija, Lietuva, Malta, Polija, Slovākija, Slovēnija un Ungārija ES pievienojās 2004. gada maijā, Bulgārija un Rumānija – 2007. gada janvārī.

[2] Slovēnija ieviesa eiro 2007. gada janvārī, Kipra un Malta – 2008. gada janvārī. Slovākija ieviesa eiro 2009. janvārī.

[3] Pieņemot, ka neeksistē likviditātes, nodokļu un kredītriska atšķirības.

laika brīdī tuvoties nullei. Tāpēc šāda specifikācija nodrošina īstermiņa procentu likmju konverģenci ar nulli līdz brīdim, kad valsts pievienojas eiro zonai, tādējādi novēršot arbitrāžas iespēju šajā laika posmā.

Lai modelētu ar pievienošanās EMS laiku saistīto neskaidrību, izmantota J. Lunda (13) pieeja un eksponenciālais sadalījums. Modeļa struktūra arī balstīta uz darbiem, kuros veikta kredītriska dinamikas modelēšana.(6; 11)

Pētījumā arī izstrādāts teorētiskā modeļa ekonometriskais novērtējums. Lai to veiktu, nepārtraukta laika sistēma pārveidota diskrēta laika sistēmā. Modeļa nestacionaritātes un nelinearitātes problēmas risināšanai koeficientu novērtēšanā izmantots paplašinātais Kalmana filtrs.

Empīriskie rezultāti liecina, ka Beļģijas, Francijas, Itālijas un Spānijas datiem labāk piemērots pētījumā izstrādātais modelis nekā Lunda vienfaktora modelis. Nīderlandei abu modeļu rezultāti ir vienādi, bet Somijai izstrādātā modeļa vērtējums ir nedaudz sliktāks. Turklāt autoru izstrādātā modeļa parametru skaits ir mazāks par konkurējošā modeļa parametru skaitu (attiecīgi 4 un 5 parametri).

Pētījuma 1.1. sadaļā skaidrots arbitrāžu neizraisošas cenas teorētiskais pamatojums un izveidots termiņstruktūras konverģences modelis ar nosacījumu, ka precīzi zināms datums, kad valsts pievienosies eiro zonai. 1.2. sadaļā veikta modeļa paplašināšana ar noteikumu, ka pievienošanās datums nav noteikts, un iegūtas modeļa termiņstruktūras aprēķināšanas formulas. 1.3. sadaļā aplūkotas modeļa implikācijas. 2. nodaļā raksturoti dati, 3. nodaļā sniegta izstrādātā modeļa koeficientu novērtēšanas ekonometrisko metožu analīze, bet 4. nodaļā apkopoti empīriskie rezultāti. Noslēgumā ietverti galvenie secinājumi.

1. MODEĻA UZBŪVE

1.1. Valsts pievienošanās eiro zonai fiksētā laikā

Aplūkotas divas valūtas – eiro un nacionālā valūta. Eiro procentu likme laikā t apzīmēta ar $R(t)$ un nacionālās valūtas procentu likme – ar $r(t)$. Tādējādi īstermiņa procentu likme nacionālajā valūtā atbilst

$$r(t) = R(t) + \delta(t) \qquad [1],$$

kur $\delta(t)$ ir iekšzemes starpība attiecībā uz $R(t)$. Pieņemts, ka $R(t)$ un $\delta(t)$ nosaka neatkarīgi stohastiski procesi. Iekšzemes starpības un eiro īstermiņa procentu likmes dinamiku patiesas varbūtības apstākļos izsaka šādi stohastiski diferenciālvienādojumi:

$$d\delta(t) = f_1(\delta, t)dt + \sigma_1(\delta)dw_1(t) \qquad [2],$$

$$dR(t) = f_2(R, t)dt + \sigma_2(R)dw_2(t) \qquad [3],$$

kur $w_1(t)$ un $w_2(t)$ ir divi savstarpēji nekorelējoši Brauna kustības procesi, f_1 un f_2 – katra procesa saneses koeficienti, bet $\sigma_1(\delta)$ un $\sigma_2(R)$ – difūzijas locekļi.(14) Riskam ir divas tirgus cenas – λ_1, λ_2, un katra atbilst nenoteiktības avotam – attiecīgi $w_1(t)$ un $w_2(t)$.

Aplūkosim prasību, kas jāatmaksā valūtā i laikā T un kas izteikta ar funkciju $h_i(T)$. Ievērojot bezarbitrāžas principu, tās cenu laikā t valūtas i vienībās izsaka šāda izteiksme:

$$E_t^{Q_i}\left[e^{-\int_t^T r_i(s)ds} h_i(T) \right], \; r_i = r \text{ vai } R \qquad [4],$$

kur Q_i ir valūtas i neitrāla riska varbūtības mērs un E_t^Q – nosacītu gaidu operators, ja varbūtības mērs ir Q.(5)

Cenai laikā t, izteiktai valūtā i, nulles kupona obligācijai ar dzēšanas termiņu T valūtas i vienībās izveidota īpaša izteiksme:

$$E_t^{Q_i}\left[e^{-\int_t^T r_i(s)ds} \cdot 1 \right] \qquad [5].$$

Zinot, ka pēc pievienošanās eiro zonai iekšzemes un eiro zonas procentu likmju termiņstruktūra būs vienāda, īsi pirms pievienošanās eiro zonai arī nacionālajā valūtā izteiktu nulles kupona obligāciju cenām jābūt gandrīz vienādām ar eiro zonas nulles kupona obligāciju cenām eiro. Turklāt tas nebūs atkarīgs no valūtas kursa brīdī, kad notiks pievienošanās eiro zonai.

Ar $P_E(T^*, T)$ apzīmē eiroobligācijas ar dzēšanas termiņu T cenu periodā T^*. No [4] vienādojuma izriet, ka esošā (perioda t) iekšzemes obligāciju cena ar noteiktu pievienošanās EMS laiku T^*, ko izsaka kā $P(t, T, T^*)$, ir vienāda ar

$$P(t,T,T^*) = E_t^Q\left[e^{-\int_t^{T*}(R(s)+\delta(s))ds} P_E(T^*,T)\right] \qquad [6],$$

kur gaidas apzīmētas ar Q, kas ir nacionālās valūtas neitrāla riska varbūtības mērs. No [5] vienādojuma iegūst perioda T^* eiroobligācijas ar dzēšanas termiņu T cenu:

$$P_E(T^*,T) = E_{T^*}^{Q_E}\left[e^{-\int_{T*}^{T} R(s)ds}\right] = E_{T*}^{Q}\left[e^{-\int_{T*}^{T} R(s)ds}\right] \qquad [7].$$

Ņemts vērā nosacījums, ka pēc pievienošanās eiro zonai mēriem Q un Q_E jāsakrīt.

Radona–Nikodima *(Radon-Nikodym)* atvasinājums nosaka sakarības starp diviem varbūtības mēriem.(5) Pieņemot, ka Radona–Nikodima atvasinājums nav atkarīgs no R_t, eiroobligācijas cenu var izteikt šādi:

$$P_E(t,T) = \mathrm{E}_t^{\mathrm{Q_E}}\left[e^{-\int_t^T R(s)ds}\right] = \frac{\mathrm{E}_t^{\mathrm{Q}}\left[\frac{d\mathrm{Q_E}}{dQ} e^{-\int_t^T R(s)ds}\right]}{\mathrm{E}_t^{\mathrm{Q}}\left[\frac{d\mathrm{Q_E}}{dQ}\right]} = \frac{\mathrm{E}_t^{\mathrm{Q}}\left[\frac{d\mathrm{Q_E}}{dQ}\right]\mathrm{E}_t^{\mathrm{Q}}\left[e^{-\int_t^T R(s)ds}\right]}{\mathrm{E}_t^{\mathrm{Q}}\left[\frac{d\mathrm{Q_E}}{dQ}\right]} = \mathrm{E}_t^{\mathrm{Q}}\left[e^{-\int_t^T R(s)ds}\right] \qquad [8].$$

Tas nozīmē, ka, izmantojot iekšzemes neitrāla riska varbūtības mēru Q vai eiro mēru Q_E, var aprēķināt eiroobligācijas cenu.

Ievietojot [7] vienādojumu [6] vienādojumā un izmantojot atkārtoto gaidu likumu, iegūst:

$$P(t,\ T,\ T^*) = E_t^Q\left[e^{-\int_t^{T*}(R(s)+\delta(s))ds} E_{T*}^Q\left(e^{-\int_{T*}^{T} R(s)ds}\right)\right] = E_t^Q\left[E_{T*}^Q\left(e^{-\int_t^{T*}(R(s)+\delta(s))ds} \cdot e^{-\int_{T*}^{T} R(s)ds}\right)\right] =$$

$$= E_t^Q\left[e^{-\int_t^{T} R(s)ds} \cdot e^{-\int_t^{T*} \delta(s)ds}\right] = E_t^Q\left[e^{-\int_t^{T} R(s)ds}\right] \cdot E_t^Q\left[e^{-\int_t^{T*} \delta(s)ds}\right] = P_E(t,T)\cdot D(t,T^*) \qquad [9],$$

kur

$$D\left(t,T^*\right) = E_{t,\delta}^Q\left[e^{-\int_t^{T*} \delta(s)ds}\right] \qquad [10]$$

ir iekšzemes diskonta faktors, kas saista iekšzemes un eiroobligāciju cenas. Ja dzēšanas termiņš $T < T^*$, [10] formulu nepārprotami var rakstīt šādi:

$$D(t,T) = E^{Q}_{t,\delta}\left[e^{-\int_t^T \delta(s)ds} \right] \quad [11].$$

Indeksi t un δ liecina par to, ka gaidas jānovērtē, ievērojot šādu faktora dinamiku:

$$d\delta(s) = \big(f_1(\delta(s),s) - \sigma_1(\delta(s))\lambda_1(\delta(s),s)\big)ds + \sigma_1(\delta(s))d\tilde{w}(s) \quad [12],$$

$$\delta = \delta(t) \quad [13],$$

kur $\tilde{w}$ ir Vīnera *(Wiener)* process, ja mērs ir Q.

[11] formula ir šāda paraboliskā parciālā diferenciālvienādojuma Feinmana–Kaca *(Feynman-Kac)* risinājuma izteiksme:

$$D_t(\delta,t) + \big(f_1(\delta,t) - \sigma_1(\delta)\lambda_1(\delta,t)\big)D_\delta(\delta,t) + \frac{1}{2}D_{\delta\delta}(\delta,t)\sigma_1^2(\delta) - \delta D(\delta,t) = 0 \quad [14]$$

ar galanosacījumu:

$$D(\delta,T) = 1 \quad [15].$$

Tālāk tiek pieņemts, ka saneses koeficients [2] vienādojumā definēts šādi:

$$f_1(\delta,t) = -\frac{\delta}{T^* - t} \quad [16],$$

un $\sigma_1(\delta) = \sigma = const$. Tas liecina par šādu stohastisku diferenciālvienādojumu, ja reālais mērs ir P:

$$d\delta(t) = -\frac{\delta(t)}{T^* - t}dt + \sigma dw_1(t) \quad [17].$$

Tiek pieņemts, ka T^* ir laiks, kad paredzēta pievienošanās eiro zonai. [17] vienādojumā atspoguļotais process stohastisko procesu teorijā plaši pazīstams kā Brauna tilts.(14; 15) Šā procesa īpašība ir, ka tas vienāds ar nulli laikā T^* ar varbūtību 1. Šādas specifikācijas nolūks ir nodrošināt starpības tuvināšanos nullei pirms pievienošanās eiro zonai laika, kas garantētu vienādas nacionālās valūtas un eiro procentu likmes. Tā kā reālais mērs P un neitrāla riska faktors Q ir vienādi, norisēm, kam ar mēru P ir varbūtība 1, arī ar mēru Q būs varbūtība 1. Tādējādi norises $\{\delta(T^*) = 0\}$varbūtība būs vienāda ar 1 arī ar neitrālu riska faktoru Q.[4]

---

[4] Ja riska mērs ir neitrāls, īstermiņa starpības process ir $d\delta(t) = \left[-\frac{\delta(t)}{T^* - t} - \lambda\sigma\right]dt + \sigma d\tilde{w}(t)$. Nav grūti pierādīt, ka tam ir šāda izteiksme (ja λ ir konstants):
$\delta(t) = (T^* - t)\int_0^t \frac{\sigma}{T^* - u}dw(u) + \frac{\delta(0)(T^* - t)}{T^*} - \sigma\lambda(T^* - t)\ln\left(\frac{T^* - t}{T^*}\right)$, kur pirmais un otrais loceklis izsaka standarta Brauna tilta procesu no $\delta(0)$ līdz nullei un trešais loceklis ir deterministiska funkcija ar nulles galīgo vērtību laikā T^*.

Šādas specifikācijas izvēli noteica tas, ka, ja pievienošanās brīdī starpība nebūtu nulle, būtu iespējama arbitrāža. Ar valūtas kursu vien nebūtu iespējams noregulēt starpību, kas nav nulle, jo šajā laikā valūtas kurss jau būtu piesaistīts kādam jau iepriekš noteiktam līmenim. Ar vispārpieņemto (Vasičeka, Koksa–Ingersola–Rosa, daudzfaktoru afīno u.tml.) modeļu specifikācijām nav iespējams garantēt nulles līmeņa īstermiņa procentu likmju starpību tieši tajā brīdī, kad notiek pievienošanās eiro zonai.

Ievietojot [16] vienādojumu [14] vienādojumā, iegūst:

$$D_t - \left(\frac{\delta}{T^* - t} + \sigma_1 \lambda_1(\delta, t) \right) D_\delta + \frac{1}{2} D_{\delta\delta} \sigma_1^2 - \delta D = 0 \qquad [18].$$

Tiek izmantota konstanta riska λ_1 cena. Aplūko afīno termiņstruktūras modeli:

$$D(\delta,\ \tau) = \exp\left[\mathrm{A}(\tau) - \delta B(\tau) \right] \qquad [19],$$

kur $\tau = T - t \geq 0$.

Tādā gadījumā ir šādi dažādi *D(δ, τ)* parciālie atvasinājumi:

$$D_t = \left(-A'(\tau) + B'(\tau)\delta \right) e^{\mathrm{A}(\tau) - \delta B(\tau)} = \left(-A'(\tau) + B'(\tau)\delta \right) D(\tau) \qquad [20],$$

$$D_\delta = -B(\tau) e^{\mathrm{A}(\tau) - \delta B(\tau)} = -B(\tau) D(\tau) \qquad [21],$$

$$D_{\delta\delta} = B^2(\tau) e^{\mathrm{A}(\tau) - \delta B(\tau)} = B^2(\tau) D(\tau) \qquad [22].$$

Ievietojot [20] un [21] vienādojumu [18] parciālajā diferenciālvienādojumā, iegūst šādu izteiksmi:

$$\left(-A'(\tau) + B'(\tau)\delta \right) D(\tau) + \left(\frac{\delta}{T^* - t} + \sigma_1 \lambda_1 \right) B(\tau) D(\tau) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 B^2(\tau) D(\tau) - \delta D(\tau) = 0.$$

Saīsinot *D*, ņemot vērā, ka $t = T - \tau$, un pārgrupējot locekļus, iegūst:

$$\left[-A'(\tau) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 B^2(\tau) + \sigma_1 \lambda_1 B(\tau) \right] + \left[B'(\tau) + \frac{1}{T^* - T + \tau} B(\tau) - 1 \right] \delta = 0.$$

Pēdējais vienādojums ir spēkā visām δ un τ vērtībām, un var secināt, ka abi locekļi iekavās vienādi ar nulli. Tas reducē uzdevumu līdz šādu divu parastu diferenciālvienādojumu sistēmas atrisināšanai:

$$-A'(\tau) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 B^2(\tau) + \sigma_1 \lambda_1 B(\tau) = 0 \qquad [23],$$

$$B'(\tau) + \frac{1}{T^* - T + \tau} B(\tau) = 1 \qquad [24].$$

[23] un [24] vienādojuma sistēmas risinājums pie sākotnējā nosacījuma, ka $A(0) = 0$ un $B(0) = 0$, sniedz šādu [19] afīnā termiņstruktūras modeļa rezultātu:

$$B(t,T) = \frac{1}{2}\left[T^* - t - \frac{\left(T^* - T\right)^2}{\left(T^* - t\right)} \right] \quad [25],$$

$$A(t,T) = \frac{\sigma_1^2}{8}\left[\frac{\left(T^* - t\right)^3}{3} - 2\left(T^* - T\right)^2 (T - t) - \frac{\left(T^* - T\right)^4}{\left(T^* - t\right)} + \frac{2}{3}\left(T^* - T\right)^3 \right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\lambda\sigma\left[\frac{\left(T^* - t\right)^2}{2} - \frac{\left(T^* - T\right)^2}{2} - \left(T^* - T\right)^2 \ln\left(\frac{(T^* - t)}{\left(T^* - T\right)} \right) \right] \quad [26].$$

1.2. Valsts pievienošanās eiro zonai nenoteiktā laikā

Lēmumu par kādas valsts pievienošanos eiro zonai un tās laiku pieņem ES institūcijas. Līdz tam pastāv zināma neskaidrība attiecībā uz pievienošanās laiku T^*. Lai noslēgtu modeli, nepieciešams definēt T^* varbūtības sadalījumu laika periodā t (ja ir neitrāls riska mērs). Varbūtību, ka valsts nepievienosies eiro zonai pirms laika u, izsaka šādi:

$$\Pr(t)\left\{T^* > u\right\} = \exp(-\int_t^u \pi(s)ds), \ \pi(s) \ge 0 \quad [27].$$

Varbūtības blīvuma funkcija ir sadalījuma funkcijas atvasinājums attiecībā uz u:

$$p(t,u) = \frac{d}{du}\Pr(t)\left\{T^* \le u\right\} = \frac{d}{du}\left[1 - \Pr(t)\left\{T^* > u\right\}\right] = \pi(u)\exp(-\int_t^u \pi(s)ds) \quad [28],$$

kur $\pi(s)$ ir riska funkcija.

Pamatojoties uz T^* sadalījumu, aprēķinot [9] vienādojuma gaidāmo vērtību visiem iespējamiem eiro zonas pievienošanās datumiem T^*, varam iegūt obligāciju cenu:

$$P(t,T) = \int_t^\infty P(t,T,T^*)p(t,T^*)dT^* = \int_t^\infty P_E(t,T)D(t,T,T^*)p(t,T^*)dT^* =$$
$$= P_E(t,T)\left[\int_t^\infty D(t,T,T^*)p(t,T^*)dT^* \right] \quad [29],$$

kur $D(t,T,T^*) = \exp\left[A(t,T,T^*) - \delta B_1(t,T,T^*)\right]$ (no [19] vienādojuma), bet A un B_1 iegūti attiecīgi no [25] un [26] vienādojuma.

Izsaka riska funkciju (13):

$$\pi(s) = \begin{cases} 0, s < \widetilde{T} \\ \theta, s \ge \widetilde{T} \end{cases} \quad [30],$$

kur $\widetilde{T}$ ir laiks, kas atbilst kādam noteiktam brīdim nākotnē, un konstante – $\theta > 0$. Šā modeļa specifikācija nepieļauj pievienošanos eiro zonai pirms $\widetilde{T}$.

Funkcija $D(t, T, T^*)$ atbilst šādam vienādojumam:

$$D(t,T,T^*) = \begin{cases} D(t,T,T^*), T < T^* \\ D(t,T^*,T^*), T > T^*. \end{cases}$$

Tādējādi, ja ir šāda riska funkcija, obligāciju cenu no [29] vienādojuma var rakstīt šādi:

$$P(t,T) = \begin{cases} P_E(t,T)\cdot\theta\int_{\widetilde{T}}^{\infty} D(t,T,T^*)e^{-\theta\left(T^*-\widetilde{T}\right)}dT^*, T \le \widetilde{T} \\ P_E(t,T)\cdot\theta\left\{\int_{\widetilde{T}}^{T} D(t,T^*,T^*)e^{-\theta\left(T^*-\widetilde{T}\right)}dT^* + \int_{T}^{\infty} D(t,T,T^*)e^{-\theta\left(T^*-\widetilde{T}\right)}dT^*\right\}, T > \widetilde{T} \end{cases}$$

[31]

vai $P(t,T) = P_E(t,T)F(t,T)$ [32],

kur

$$F(t,T) = \begin{cases} \theta\int_{\widetilde{T}}^{\infty} D(t,T,T^*)e^{-\theta\left(T^*-\widetilde{T}\right)}dT^*, T \le \widetilde{T} \\ \theta\left\{\int_{\widetilde{T}}^{T} D(t,T^*,T^*)e^{-\theta\left(T^*-\widetilde{T}\right)}dT^* + \int_{T}^{\infty} D(t,T,T^*)e^{-\theta\left(T^*-\widetilde{T}\right)}dT^*\right\}, T > \widetilde{T} \end{cases}$$ [33].

Atbilstoši [31] un [32] vienādojumam var aprēķināt nulles kupona obligācijas ienesīgumu līdz dzēšanas termiņam:

$$y(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{T-t} = -\frac{\log\left(P_E(t,T)\cdot F(t,T)\right)}{T-t} = -\frac{\log P_E(t,T)}{T-t} - \frac{\log F(t,T)}{T-t} =$$
$$= y_E(t,T) + S(t,T) = y_E(\tau) + S(\tau)$$

[34],

kur $y_E(\tau)$ ir eiroobligāciju ienesīgums līdz dzēšanas termiņam, kas ir $\tau = T - t$, un $S(t,T) = S(\tau)$ – attiecīgā dzēšanas termiņa ienesīguma starpība.

1.3. Modeļa implikācijas

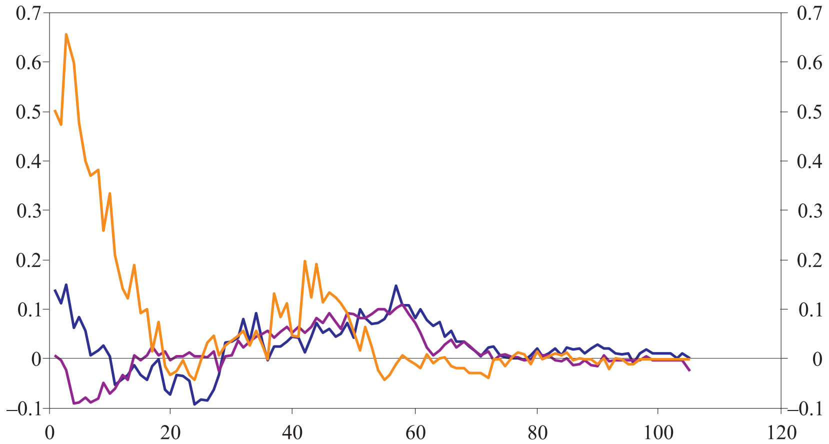
Lunda modelī ienesīguma starpības obligācijām ar termiņu, kas beidzas pirms pievienošanās eiro zonai, pievienošanās EMS nevar ietekmēt, tomēr tas neatbilst datiem (sk. 1.–3. att.). Piedāvātajā modelī EMS ietekmē visu termiņu obligācijas, kas, pēc autoru domām, ir daudz reālāk.

Lai parādītu, ka ar izveidoto modeli iegūst ticamus rezultātus, aplūkoti skaitliski piemēri. Pirmais no tiem attiecas uz valsti ar lielu varbūtību pievienoties EMS. Šādai valstij, kurai koeficients $\theta = 4$, varbūtība pievienoties EMS viena gada laikā no datuma $\widetilde{T}$ ir vienāda ar $p = 1 - e^{-\theta} = 0.98$. Stāvokļa mainīgā pašreizējā vērtība ir $\delta = 0.02$. Otrai valstij, kurai koeficients $\theta = 0.01$, varbūtība pievienoties EMS viena gada laikā no datuma $\widetilde{T}$ ir vienāda ar $p = 1 - e^{-\theta} = 0.01$ jeb ļoti zema.

1. attēls

BEF, FRF un NLG veikto darījumu un DEM veikto darījumu ar 2 gadu termiņu procentu likmju starpības

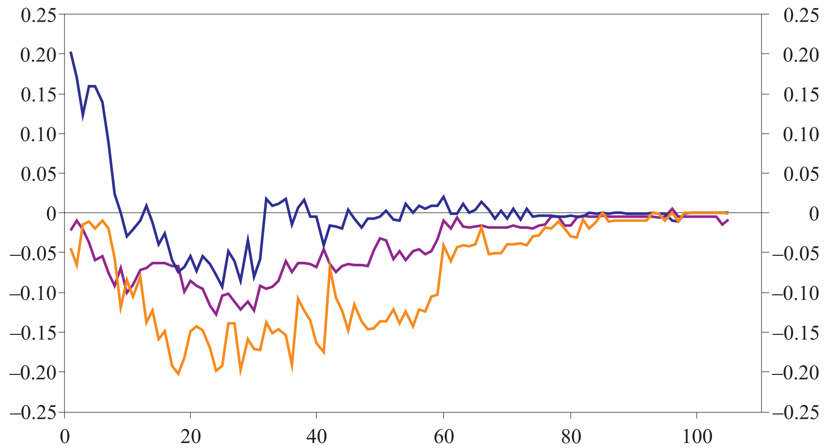
(%; nedēļas (1996. gada 14. augusts–1998. gada 12. augusts))



2. attēls

BEF, FRF un NLG veikto darījumu un DEM veikto darījumu ar 10 gadu termiņu procentu likmju starpības

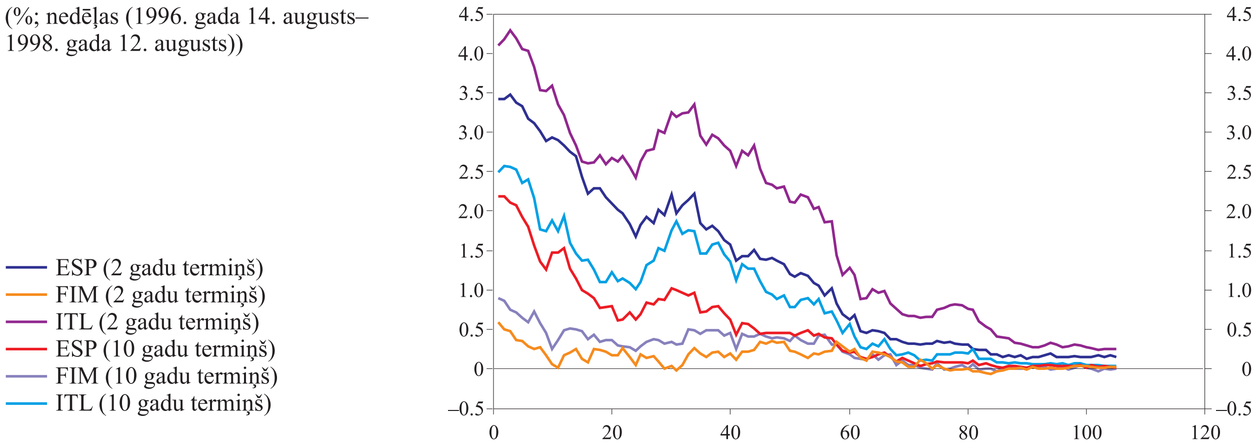
(%; nedēļas (1996. gada 14. augusts–1998. gada 12. augusts))



3. attēls

ESP, FIM un ITL veikto darījumu un DEM veikto darījumu ar 2 un 10 gadu termiņu procentu likmju starpības

(%; nedēļas (1996. gada 14. augusts–1998. gada 12. augusts))

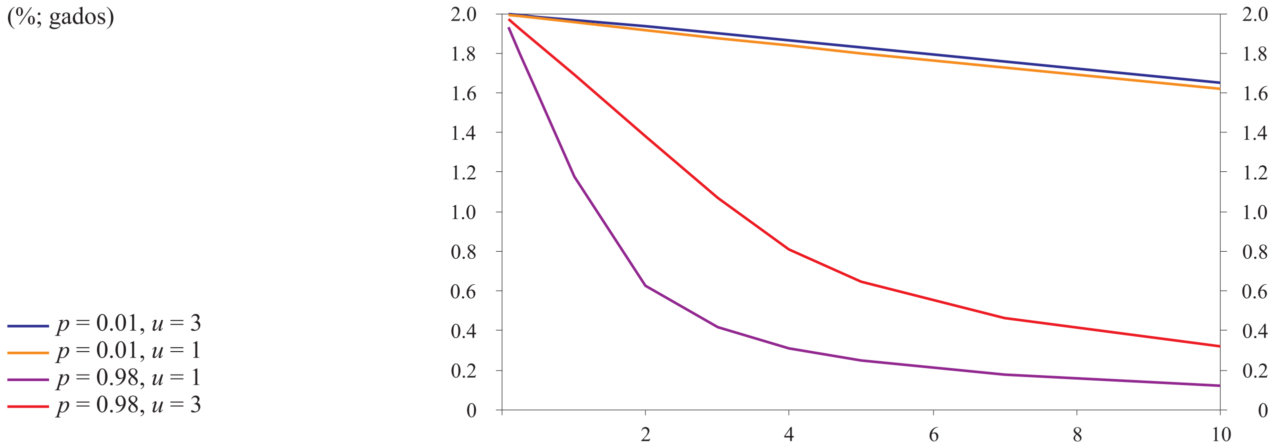


4. attēlā atspoguļota šādu valstu procentu likmju starpības termiņstruktūra ar 3 gadu termiņu ($u = \tilde{T} - t = 3$) un 1 gada termiņu līdz datumam $\tilde{T}$ ($u = \tilde{T} - t = 1$). Valstij, kurai ir liela pievienošanās varbūtība eiro zonai, procentu likmju starpības termiņstruktūra strauji samazinās līdz ar termiņa tuvošanos abos gadījumos, tomēr, jo mazāk laika atlicis līdz iespējamam pievienošanās EMS datumam, jo straujāks šis samazinājums. Īstermiņa procentu likmju starpība ir aptuveni 2%, bet 10 gadu procentu likmju starpība ir 32 bāzes punkti 3 gadu termiņam un 12 bāzes punktu – 1 gada termiņam. Valstij ar zemu pievienošanās varbūtību procentu likmju starpības termiņstruktūra sarūk ļoti pakāpeniski un gandrīz nemaz nav atkarīga no parametra $\tilde{T} - t$. 10 gadu termiņam procentu likmju starpība nedaudz pārsniedz 1.6%.

4. attēls

Procentu likmju starpības teorētiskā termiņstruktūra

(%; gados)



Valstij ar lielu varbūtību pievienoties EMS $\theta = 4$, t.i., varbūtība pievienoties EMS viena gada laikā no datuma $\tilde{T}$ ir vienāda ar $p = 1 - e^{-\theta} = 0.98$, un stāvokļa mainīgā esošā vērtība ir $\delta = 0.02$. Otrai valstij koeficients $\theta = 0.01$, t.i., varbūtība pievienoties EMS viena gada laikā no datuma $\tilde{T}$ ir vienāda ar $p = 1 - e^{-\theta} = 0.01$ jeb ļoti zema. $u = \tilde{T} - t$ apzīmē laiku jeb termiņu līdz iespējamam pievienošanās EMS datumam $\tilde{T}$.

2. DATI

Modeļa parametru novērtēšanai saskaņā ar Lunda pētījumu (13) izmantotas naudas tirgus un mijmaiņas darījumu procentu likmes. Naudas tirgus dati ietver procentu likmes darījumiem ar 1, 3, 6 un 12 mēnešu termiņu, bet mijmaiņas darījumu tirgus dati – procentu likmes darījumiem ar 2–5, 7 un 10 gadu termiņu. Aplūkotas šādas valūtas: BEF, FRF, FIM, ITL, ESP un NLG. Visi dati ir attiecīgās valsts valūtas un DEM ienesīguma starpība. Sniegti nedēļas (trešdienas) ienesīguma izlases rādītāji no 1996. gada 14. augusta līdz 1998. gada 12. augustam. Šāda datu izlase sniegta saistībā ar šā perioda peļņas likmju vērojamo kraso konverģenci ar nulli, datiem atklājot Brauna tilta procesa raksturīgās iezīmes (sk. 1.–3. att.).

3. NOVĒRTĒJUMI

Pieņemsim, ka tirgū eksistē n procentu likmes ar τ_1, τ_2, …, τ_n termiņiem. Eiro procentu likmju atbilstošās starpības ir $\widetilde{S}(\tau_1)$, …, $\widetilde{S}(\tau_n)$. Šādā gadījumā, pamatojoties uz [17] vienādojumu, iepriekš izstrādāto modeli var pārveidot šādi:

$$d\delta = -\frac{\delta}{T^* - t}dt + \sigma_\delta dw_\delta \qquad [35],$$

$$\widetilde{S}(t,\tau_i) = S(t,\delta,\psi,\tau_i) + \eta_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad [36],$$

kur $S(t,\delta,\psi,\tau_i) = -\dfrac{\log F(t,\delta,\psi,\tau_i)}{\tau_i}$ ir teorētiskā starpība no [34] vienādojuma (S atkarīgs no δ, jo no [19] vienādojuma izriet, ka D atkarīgs no δ), $\eta_i \sim N(0,\sigma_\eta^2 I)$ ir aprēķinu kļūdas, ψ ir modeļa parametru vektors un $\psi = (\theta, \sigma_\eta, \sigma_\delta, \lambda_1)$.

[35] un [36] vienādojuma sistēma nosaka nelineāru nepārtraukta laika stāvokļa telpas sistēmu, kurā [35] ir pārejas vienādojums un [36] – signāla jeb mērījumu vienādojums.(8; 9)

Lai novērtētu parametra vektoru ψ, [35] un [36] vienādojuma sistēma jāpārveido diskrēta laika formā un jālieto paplašinātais Kalmana filtrs (9) sakarā ar mērījumu vienādojumu nelinearitāti.[5] Šā pārveidojuma apraksts sniegts pielikumā.

4. EMPĪRISKIE REZULTĀTI

Ar autoru modeli veiktā novērtējuma rezultāti sniegti tabulā. Visi parametri ir statistiski nozīmīgi. Riska funkcijas parametrizācija [35] vienādojumā nozīmē, ka varbūtība pievienoties EMS viena gada laikā no 1999. gada janvāra vienāda ar $1 - \exp(-\theta)$. Iegūtais parametra θ novērtējums zināmā mērā atbilst Lunda novērtējumam.(13) Varbūtība pievienoties EMS bija spēcīga Beļģijai un Francijai.

[5] Nav iespējams piemērot vispārināto momentu metodi *(GMM, Generalised Method of Moments)*, jo modelis ir nestacionārs.

Somijai, Itālijai un Spānijai tā bija neliela. Nīderlandei parametrs θ vienāds ar 0.86, liecinot, ka varbūtība pievienoties EMS viena gada laikā no 1999. gada janvāra vienāda ar 0.58. Šāda varbūtība, šķiet, ir ļoti zema. To var izskaidrot šādi, ka aplūkotās izlases ietvaros Nīderlandes īstermiņa procentu likmju starpība netuvojās nullei, bet tikai svārstījās ap to (sk. 1. att.). Tāpēc ar Brauna tilta procesu neizdodas atspoguļot novērojamās īstermiņa ienesīguma starpības dinamiku.

Tabula

Brauna tilta modeļa vērtējumu salīdzinājums ar Lunda (13) vienfaktora modeļa ar konstantu riska funkciju vērtējumiem

(abos modeļos izmantotas ienesīguma starpības attiecībā pret DEM)

Valūtas kods	*Modelis*	θ	$\sigma_\eta \times 10^{-3}$	$\sigma_\delta \times 10^{-3}$	λ	k
BEF	Brauna tilta modelis	45.1	0.53	5.60	0.118	–
		(0.06)	(0.01)	(0.43)	(0.001)	–
	Lunda modelis	266	0.63	3.62	–0.0006	0.207
		(0.3)	(0.02)	(0.40)	(0.0728)	(0.034)
ESP	Brauna tilta modelis	0.148	1.49	5.39	0.920	–
		(0.001)	(0.03)	(0.10)	(0.002)	–
	Lunda modelis	0.599	1.98	5.74	0.0205	0.939
		(0.061)	(0.04)	(0.54)	(0.0216)	(0.118)
FIM	Brauna tilta modelis	0.0810	1.18	5.93	–0.306	–
		(0.0002)	(0.03)	(0.04)	(0.002)	–
	Lunda modelis	0.247	1.10	3.53	2.33×10^{-6}	–0.440
		(0.053)	(0.04)	(1.70)	(2.07×10^{-5})	(0.283)
FRF	Brauna tilta modelis	3.93	0.74	4.12	–0.396	–
		(0.118)	(0.02)	(0.51)	(0.055)	–
	Lunda modelis	268	0.75	3.50	1.38×10^{-6}	0.893
		(41.1)	(0.03)	(0.22)	(1.11×10^{-5})	(0.040)
ITL	Brauna tilta modelis	0.159	2.56	7.74	1.034	–
		(0.001)	(0.06)	(0.16)	(0.001)	–
	Lunda modelis	0.595	3.39	7.90	-1.50×10^{-6}	1.10
		(0.012)	(0.09)	(0.22)	(8.46×10^{-6})	(0.034)
NLG	Brauna tilta modelis	0.857	0.58	3.88	–0.2418	–
		(0.084)	(0.01)	(0.43)	(0.034)	–
	Lunda modelis	258	0.58	5.91	1.839	–0.132
		(14.3)	(0.01)	(0.66)	(0.231)	(0.028)

Brauna tilta modelī koeficientu novērtēšanā izmanto paplašināto Kalmana filtru (detalizētāku skaidrojumu sk. pielikumos). Lunda modelis ir vienfaktora modelis ar konstantu riska funkciju (detalizētāks skaidrojums Lunda darbā (13)). Izlases periods ir no 1996. gada augusta līdz 1998. gada augustam. σ_η ir aprēķinu kļūdas standartnovirze novērojamām ienesīguma starpībām attiecībā pret DEM, σ_δ ir īstermiņa procentu likmju starpības tūlītējais svārstīgums, λ ir riska cena, k ir Lunda modeļa atgriešanās pie vidējā parametrs. Funkcija $\pi(s)$ $s < \widetilde{T}$ gadījumā vienāda ar nulli un $s \geq \widetilde{T}$ gadījumā ir θ, kur $\widetilde{T}$ ir laika brīdis, pirms kura šis modelis nepieļauj pievienošanos EMS. Varbūtība, ka kāda valsts nepievienosies EMS pirms laika u, izteikta šādi:

$$\Pr(t)\{T^* > u\} = \exp(-\int_t^u \pi(s)ds).$$

T^* – datums, kurā valsts pievienojas EMS.
Iekavās – standartkļūdas.

Lai novērtētu Brauna tilta modeļa iekšizlases piemērotības rezultātu, tā aprēķinu kļūdas standartnovirze salīdzināta ar Lunda modeļa (13) ar konstantu riska funkciju vienfaktora versijas standartnovirzi. Sevišķi, ja reālais mērs ir P, īstermiņa ienesīguma starpības dinamiku nosaka Vasičeka process.

$$d\delta(t) = -k\delta(t)dt + \sigma_\delta dw_1(t)$$

Izmantojot paplašināto Kalmana filtru, novērtēti pieci parametri Lunda modeļa (13) ar konstantu riska funkciju vienfaktora versijai k, λ, σ_δ, θ un σ_η, kur k ir atgriešanās pie vidējā parametra, σ_δ – īstermiņa procentu likmju starpības tūlītējais svārstīgums, λ – riska cena un σ_η – aprēķinu kļūdas standartnovirze. Novērtēšanas algoritms aprakstīts 2. pielikumā. Modeļa parametru novērtēšanā izmantota tāda pati izlase kā Brauna tilta modelim.

Pamatojums izvēlēties Vasičeka modeļa specifikāciju bez beznosacījuma vidējā lieluma meklējams procesa nosacītas matemātiskās cerības $E_{t_0}\left(\delta(t)\right)$ īpašībā tuvoties nullei, laikam t tiecoties bezgalībā. Ar šo īpašību iespējams atspoguļot konverģenci vēsturiskajās laikrindās.

Tabulā parādīti abu modeļu novērtējuma rezultāti. To aprēķinu kļūdu standartnovirzes salīdzinājums liecina, ka ar piedāvāto modeli iekšizlases piemērotība ir labāka gandrīz visām valstīm, izņemot Nīderlandi un Somiju. Turklāt šajā modelī ir mazāk parametru (4) nekā konkurējošajā modelī (5).

Attiecībā uz Nīderlandi aprēķina kļūdas standartnovirze abiem modeļiem ir vienāda. To var skaidrot ar minēto daļēji pareizo Brauna tilta procesa specifikāciju aplūkotās izlases īstermiņa procentu likmju starpībām. Somijai Brauna tilta modelim ir nedaudz lielāka aprēķinu kļūdas standartnovirze, ko var skaidrot ar novērotajām ienesīguma starpības termiņstruktūras novirzēm (sk. 3. att.). Tās liecina, ka Somijas ienesīguma likmju starpības pareiza raksturojuma iegūšanai nepieciešams papildu faktors.

Jānorāda, ka Lunda modelī koeficients k, kas raksturo procesa atgriešanos vidējā līmenī, Somijai un Nīderlandei ir negatīvs. Tas norāda, ka modeļa dinamika kļūst nestabila, tāpēc tai nav nekādas ekonomiskas jēgas. Šajā gadījumā parametrs k noder tikai labākai piemērojamībai.

5. SECINĀJUMI

Pētījumā izveidots procentu likmju termiņstruktūras konverģences modelis bezarbitrāžas cenu ietvarā. Modelis raksturo to valstu, kuras gatavojas pilntiesīgai dalībai EMS, procentu likmju konverģenci ar eiro zonas valstu procentu likmēm. Veidojot modeli, ņemts vērā gan fiksēts, gan gadījuma rakstura laiks, kurā valsts pievienojas EMS.

Salīdzinājumā ar šajā jomā līdz šim izveidotajiem modeļiem (3; 13) pētījumā izstrādātā modeļa specifikācija nodrošina iekšzemes īstermiņa procentu likmju konverģenci ar attiecīgajām eiro zonas valstu procentu likmēm jau pirms pievienošanās EMS laika. Tas panākts, pieņemot, ka procentu likmju starpības faktors atbilst Brauna tilta procesam. Šāds pieņēmums ļauj modelī izvairīties no arbitrāžas iespējas pievienošanās EMS laikā. Atvasinātās formulas ļauj pareizāk novērtēt procentu likmju instrumentu cenas un tādējādi no šīm cenām iegūt precīzākas tirgus gaidas.

Teorētiskajam modelim izstrādāts ekonometriskais novērtējums. Pētījumā modelim izveidots ekonometriskās novērtēšanas pamats, izmantojot paplašināto Kalmana filtru.

Empīrisko rezultātu parametru vērtības ir ticamas. Izveidotā modeļa aprēķinu kļūdu standartnovirze salīdzināta ar Lunda izveidoto Vasičeka modeļa versiju. Attiecībā uz Beļģiju, Franciju, Itāliju un Spāniju piedāvātā modeļa aprēķinu kļūdas standartnovirze ir mazāka nekā konkurējošajam modelim. Tā abos modeļos ir vienāda Nīderlandei, bet Somijai nedaudz sliktāka. Īstermiņa starpība Nīderlandei netuvojas nullei, izlases periodā tikai svārstoties ap nulli un liecinot, ka Brauna tilta process īstermiņa starpībām nav pilnībā pareiza specifikācija. Novērotā ienesīgumu starpības termiņstruktūra Somijai diverģē, tāpēc tās precīzai raksturošanai nepieciešams papildu faktors. Turklāt šim modelim ir mazāk parametru (4) nekā otram modelim (5).

Piedāvātais modelis izmantojams, lai izveidotu procentu likmju termiņstruktūras modeli ne tikai valstij, kas plāno pievienoties eiro zonai, bet gan jebkurai valstij, kas plāno pievienoties jebkādai valūtas zonai. Piemēram, modeli var izmantot Dienvidaustrumāzijas valstis, kas pašlaik apspriež iespēju veidot savu valūtas zonu.

PIELIKUMI

1. Diskrēta laika stāvokļa telpas modeļa atvasināšana

Pieņemsim, ka tirgū darbojas n procentu likmes ar τ_1, τ_2, ..., τ_n termiņiem. Atbilstošās eiro procentu likmju starpības ir $\widetilde{S}(\tau_1)$, $\widetilde{S}(\tau_2)$, …, $\widetilde{S}(\tau_n)$. Šādā gadījumā, pamatojoties uz [17] vienādojumu, iepriekš izveidoto modeli var pārveidot šādi:

$$d\delta = -\frac{\delta}{T^* - t}dt + \sigma_\delta dw_\delta \qquad [37],$$

$$\widetilde{S}(t,\tau_i) = S(t,\delta,\psi,\tau_i) + \eta_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad [38],$$

kur $S(t,\delta,\psi,\tau_i) = -\dfrac{\log F(t,\delta,\psi,\tau_i)}{\tau_i}$ ir teorētiskās starpības izteiksme no [34] vienādojuma (S ir atkarīgs no δ, jo no [19] vienādojuma izriet, ka D ir atkarīgs no δ), $\eta_i \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2 I)$ ir aprēķinu kļūdas, ψ ir modeļa parametru vektors un $\psi = (\theta, \sigma_\eta, \sigma_\delta, \lambda_1)$.

Definē vektorus:

$$\bar{S}(t,\delta,\psi) = \left[S(t,\delta,\psi,\tau_1), S(t,\delta,\psi,\tau_2), \ldots, S(t,\delta,\psi,\tau_n)\right],$$
$$\bar{\widetilde{S}}(t) = \left[\widetilde{S}(t,\tau_1), \widetilde{S}(t,\tau_2), \ldots, \widetilde{S}(t,\tau_n)\right]$$

un

$$\bar{\eta} = \left[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\right].$$

[37] un [38] vienādojuma sistēma nosaka stāvokļa telpas sistēmu, kurā [37] ir pārejas vienādojums un [38] – signāla jeb mērījumu vienādojums.(8; 9)

T^* gadījuma sadalījums [37] vienādojumā arī ir uzdevuma izņēmums. Saskaņā ar stohastisko diferenciālvienādojumu teorijas vispārpieņemto pieeju (15) [37] vienādojuma risinājums noteikts kā funkcija $\delta(t)$, kas apmierina šādu integrālvienādojumu:

$$\delta(t) = \delta(t_0) + \int_{\widetilde{T}}^{\infty}\left(\int_{t_0}^{t} -\frac{\delta(s)}{T^* - s}ds\right)\theta e^{-\theta\left(T^* - \widetilde{T}\right)}dT^* + \int_{t_0}^{t}\sigma dw(s).$$

Mainot integrācijas kārtību pirmajos integrāļos, iegūst:

$$\delta(t) = \delta(t_0) + \int_{t_0}^{t} ds \int_{\widetilde{T}}^{\infty}\left(-\frac{\delta(s)}{T^* - s}\theta e^{-\theta\left(T^* - \widetilde{T}\right)}dT^*\right) + \int_{t_0}^{t}\sigma dw(s) =$$

$$= \delta(t_0) + \int_{t_0}^{t} -\theta e^{\theta\left(\widetilde{T} - s\right)} Ei\left(\theta\left(\widetilde{T} - s\right)\right)\delta(s)ds + \int_{t_0}^{t}\sigma dw(s),$$

kur $Ei(x) = \int_1^{\infty} \frac{\exp(-xt)}{t} dt$ ir speciāla funkcija, ko sauc par eksponenciālo integrāli.(1)

Pēdējā izteiksme ekvivalenta šādam stohastiskam diferenciālvienādojumam:

$$d\delta(t) = -\theta e^{\theta(\widetilde{T}-t)} Ei\left(\theta\left(\widetilde{T}-t\right)\right)\delta(t) + \sigma dw(t) = B(t)\delta(t) + \sigma dw(t) \qquad [39].$$

Tā kā novērojumi izlasēs ir diskrēti, lai veiktu ekonometrisko novērtēšanu, nepārtraukta laika stāvokļa telpas sistēma, ko veido [37] un [38] vienādojums, jāpārveido diskrēta laika izteiksmē. Lai to veiktu, aplūko izteiksmi $d(X^{-1}(t,t_0)\delta(t))$, kur $X(t, t_0)$ ir šāda parasta homogēna diferenciālvienādojuma pamatrisinājums:

$$dX(t,t_0) = -\theta e^{\theta(\widetilde{T}-t)} Ei\left(\theta\left(\widetilde{T}-t\right)\right) X(t,t_0)dt = B(t)X(t,t_0)dt \qquad [40],$$

ja sākotnējais nosacījums ir $X(t_0, t_0) = 1$ [41].

No [39] vienādojuma atvasina:

$$\begin{aligned} d\left(X^{-1}(t,t_0)\delta(t)\right) &= -X^{-2}(t,t_0)B(t)X(t,t_0)\delta(t)dt + X^{-1}(t,t_0)d\delta(t) = \{[39]\} = \\ &= -X^{-1}(t,t_0)B(t)X(t,t_0)\delta(t)dt + X^{-1}(t,t_0)B(t)\delta(t)dt + X^{-1}(t,t_0)\sigma dw(t) = \\ &= X^{-1}(t,t_0)\sigma dw(t) \end{aligned} \qquad [42].$$

Integrējot [42] vienādojumu no t_0 līdz t un ņemot vērā [41] vienādojumu, iegūst:

$$X^{-1}(t,t_0)\delta(t) - \delta(t_0) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s,t_0)\sigma dw(s) \qquad [43]$$

vai

$$\delta(t) = X(t,t_0)\delta(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t,t_0)X^{-1}(s,t_0)\sigma dw(s) \qquad [44].$$

Tādējādi, lai iegūtu [39] vienādojuma diskrēta laika versiju, jāatrod funkcija $X(t,t_0)$. Lai to izdarītu, [40] vienādojumu var pārrakstīt šādi:

$$\frac{dX(t,t_0)}{X(t,t_0)} = -\theta e^{\theta(\widetilde{T}-t)} Ei\left(\theta\left(\widetilde{T}-t\right)\right)dt \qquad [45].$$

Integrējot [45] vienādojumu no t_0 līdz t, ņemot vērā [41] vienādojumu, lietojot funkcijas *Ei* definīciju un mainot integrācijas kārtību, iegūst:

$$\ln X(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}-\theta e^{\theta(\tilde{T}-s)}Ei\left(\theta\left(\tilde{T}-s\right)\right)ds=\int_{t_0}^{t}-\theta e^{\theta(\tilde{T}-s)}\left[\int_1^{\infty}\frac{e^{-\theta(\tilde{T}-s)u}}{u}du\right]ds=$$
$$=\int_{t_0}^{t}\left[\int_1^{\infty}-\theta e^{\theta(\tilde{T}-s)}\frac{e^{-\theta(\tilde{T}-s)u}}{u}du\right]ds=\int_{t_0}^{t}\left[\int_1^{\infty}-\theta\frac{e^{\theta(\tilde{T}-s)-\theta(\tilde{T}-s)u}}{u}du\right]ds=\int_{t_0}^{t}\left[\int_1^{\infty}-\theta\frac{e^{\theta(\tilde{T}-s)(1-u)}}{u}du\right]ds=$$
$$=\int_1^{\infty}-\theta\left[\int_{t_0}^{t}e^{\theta(\tilde{T}-s)(1-u)}ds\right]\frac{1}{u}du=\int_1^{\infty}-\theta\left\{-\frac{1}{\theta(1-u)}\left[e^{\theta(1-u)(\tilde{T}-t)}-e^{\theta(1-u)(\tilde{T}-t_0)}\right]\right\}\frac{1}{u}du=$$
$$=\int_1^{\infty}\left\{\frac{e^{\theta(1-u)(\tilde{T}-t)}-e^{\theta(1-u)(\tilde{T}-t_0)}}{u}+\frac{e^{\theta(1-u)(\tilde{T}-t)}-e^{\theta(1-u)(\tilde{T}-t_0)}}{(1-u)}\right\}du=$$
$$=\int_1^{\infty}\left\{\frac{e^{\theta(1-u)(\tilde{T}-t)}}{u}-\frac{e^{\theta(1-u)(\tilde{T}-t_0)}}{u}+\frac{e^{\theta(1-u)(\tilde{T}-t)}-e^{\theta(1-u)(\tilde{T}-t_0)}}{(1-u)}\right\}du=I_1-I_2+I_3$$

[46],

kur pirmais integrālis ir:

$$I_1=\int_1^{\infty}\frac{e^{\theta(1-u)(\tilde{T}-t)}}{u}du=\int_1^{\infty}\frac{e^{\theta(\tilde{T}-t)}e^{-\theta(\tilde{T}-t)u}}{u}du=e^{\theta(\tilde{T}-t)}Ei\left[\theta\left(\tilde{T}-t\right)\right] \quad [47].$$

Otro integrāli aprēķina tādā pašā veidā:

$$I_2=e^{\theta(\tilde{T}-t_0)}Ei\left[\theta\left(\tilde{T}-t_0\right)\right] \quad [48].$$

Trešo integrāli iegūst šādi:

$$I_3=\int_1^{\infty}\frac{e^{\theta(1-u)(\tilde{T}-t)}-e^{\theta(1-u)(\tilde{T}-t_0)}}{1-u}du=\{u'=u-1\}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\theta u'(\tilde{T}-t)}-e^{-\theta u'(\tilde{T}-t_0)}}{u'}du'=$$
$$=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\theta u'(\tilde{T}-t_0)}-e^{-\theta u'(\tilde{T}-t)}}{u'}du'=\ln\frac{\theta\left(\tilde{T}-t\right)}{\theta\left(\tilde{T}-t_0\right)}=\ln\frac{\left(\tilde{T}-t\right)}{\left(\tilde{T}-t_0\right)}. \quad [49].$$

No [46]–[49] vienādojuma izteiksmes izriet:

$$\ln X\left(\mathrm{t},\mathrm{t}_0\right)=e^{\theta(\tilde{T}-t)}Ei\left[\theta\left(\tilde{T}-t\right)\right]-e^{\theta(\tilde{T}-t_0)}Ei\left[\theta\left(\tilde{T}-t_0\right)\right]+\ln\frac{\tilde{T}-t}{\tilde{T}-t_0}$$

vai abu pušu eksponenciāls ir:

$$X(t_0,t)=\frac{\tilde{T}-t}{\tilde{T}-t_0}\exp\left\{e^{\theta(\tilde{T}-t)}Ei\left[\theta\left(\tilde{T}-t\right)\right]-e^{\theta(\tilde{T}-t_0)}Ei\left[\theta\left(\tilde{T}-t_0\right)\right]\right\} \quad [50].$$

Pieņemot, ka t_i ir zināmie diskrēta laika momenti, i = 1, 2, …, N un intervālu starp diviem secīgiem laika momentiem izsaka ar $\Delta=t_i-t_{i-1}$, no [50] vienādojuma izriet:

$$X(t_i,t_{i-1})=\frac{\widetilde{T}-t_i}{\widetilde{T}-t_{i-1}}\exp\left\{e^{\theta(\widetilde{T}-t_i)}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-t_i\right)\right]-e^{\theta(\widetilde{T}-t_{i-1})}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-t_{i-1}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{\widetilde{T}-t_{i-1}-\Delta}{\widetilde{T}-t_{i-1}}\exp\left\{e^{\theta(\widetilde{T}-t_{i-1}-\Delta)}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-t_{i-1}-\Delta\right)\right]-e^{\theta(\widetilde{T}-t_{i-1})}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-t_{i-1}\right)\right]\right\}=$$

$$=\left(1-\frac{\Delta}{\widetilde{T}-t_{i-1}}\right)\exp\left\{e^{\theta(\widetilde{T}-t_{i-1})}\left[e^{-\theta\Delta}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-t_{i-1}-\Delta\right)\right]-Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-t_{i-1}\right)\right]\right]\right\} \qquad [51].$$

Tādējādi no [44] un [51] vienādojuma iegūta $\delta(t)$ rekursīvā atkarība no iepriekšējās vērtības:

$$\delta(t_i)=X(t_i,t_{i-1})\delta(t_{i-1})+\varepsilon(t_i),$$

kur

$$\varepsilon(t_i)=\int_{t_{i-1}}^{t_i}X(t_i,t_{i-1})X^{-1}(s,t_{i-1})\sigma dw(s)=$$

$$=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{\widetilde{T}-t_i}{\widetilde{T}-s}\exp\left\{\begin{array}{l}e^{\theta(\widetilde{T}-t_i)}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-t_i\right)\right]-e^{\theta(\widetilde{T}-t_{i-1})}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-t_{i-1}\right)\right]-e^{\theta(\widetilde{T}-s)}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-s\right)\right]+\\+e^{\theta(\widetilde{T}-t_{i-1})}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-t_{i-1}\right)\right]\end{array}\right\}\sigma dw(s)=$$

$$=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{\widetilde{T}-t_{i-1}-\Delta}{\widetilde{T}-s}\exp\left\{e^{\theta(\widetilde{T}-t_{i-1}-\Delta)}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-t_{i-1}-\Delta\right)\right]-e^{\theta(\widetilde{T}-s)}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-s\right)\right]\right\}\sigma dw(s).$$

Stohastiskajam integrālim $\varepsilon(t_i)$ ir normāls sadalījums ar nulles nosacīto matemātisko cerību $E(\varepsilon(t_i)|F_{t_{i-1}})=0$, kur $F_{t_{i-1}}$ ir laika momentā t_{i-1} pieejamā informācija. $\varepsilon(t_i)$ nosacītā dispersija izriet no stohastiskā integrāļa īpašībām.(14; 15)

$$\Gamma_{t_i}=Var(\varepsilon(t_i)|F_{t_{i-1}})=E(\varepsilon^2(t_i)|F_{t_{i-1}})=$$

$$=E\left(\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{\widetilde{T}-t_{i-1}-\Delta}{\widetilde{T}-s}\exp\left\{e^{\theta(\widetilde{T}-t_{i-1}-\Delta)}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-t_{i-1}-\Delta\right)\right]-e^{\theta(\widetilde{T}-s)}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-s\right)\right]\right\}\sigma dw(s)\right]^2\middle|F_{t_{i-1}}\right)=$$

$$=\left[\left(\widetilde{T}-t_{i-1}-\Delta\right)\sigma\right]^2\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{1}{\left(\widetilde{T}-s\right)^2}\exp\left\{2\left\{e^{\theta(\widetilde{T}-t_{i-1}-\Delta)}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-t_{i-1}-\Delta\right)\right]-e^{\theta(\widetilde{T}-s)}Ei\left[\theta\left(\widetilde{T}-s\right)\right]\right\}\right\}ds.$$

Tāpēc [37] un [38] vienādojuma sistēmu var pārrakstīt diskrēta laika stāvokļa telpas izteiksmē:

$$\delta(t_i)=\mathrm{X}(t_i,t_{i-1})\delta(t_{i-1})+\varepsilon(t_i) \qquad [52],$$

$$\overline{\overline{S}}(t_i)=\overline{S}(t_i,\delta(t_i),\psi)+\overline{\eta}(t_i) \qquad [53],$$

kur $X(t_i,t_{i-1})$ nosaka [51] vienādojums, bet $\overline{S}(t_i,\delta(t_i),\psi)$ – [34] vienādojums.

2. Paplašinātā Kalmana filtra uzbūve

Attiecībā uz stāvokļa mainīgo $\delta(t_i)$ [53] mērījumu vienādojums ir nelineārs, tāpēc jāizmanto paplašinātais Kalmana filtrs.(9) Pretstatā Lunda pieejai izmantots paplašinātais Kalmana filtrs, nevis iteratīvais paplašinātais Kalmana filtrs. Tas ļauj ievērojami paātrināt filtrējošā algoritma darbību un rezultātā arī ticamības funkcijas maksimizēšanu.

Lai iegūtu paplašināto Kalmana filtru, linearizē [53] vienādojumu punktā $\delta(t_i|t_{i-1})$, kur $\delta(t_i|t_{i-1}) = X(t_i, t_{i-1})\delta(t_{i-1}|t_{i-1})$ ir viena soļa uz priekšu stāvokļa prognoze laika momentā t_{i-1}:

$$\overline{S}(t_i, \delta, \psi) \approx \overline{S}(t_i, \delta(t_i|t_{i-1}), \psi) + \frac{\partial \overline{S}}{\partial \delta}(t_i, \delta(t_i|t_{i-1}), \psi) \cdot \left(\delta - \delta(t_i|t_{i-1})\right) \qquad [54].$$

Atvasinājumu vektora $\frac{\partial \overline{S}(t_i, \delta, \psi)}{\partial \delta}$ komponentus var iegūt no [33], [34] un [19] vienādojuma:

$$\frac{\partial \overline{S}(t_i, \delta, \psi, \tau_i)}{\partial \delta} = \begin{cases} \dfrac{\theta \int_{\widetilde{T}}^{\infty} D(t, T^*, T)\left(-B(t, T^*, T)\right) e^{-\theta\left(T^* - \widetilde{T}\right)} dT^*}{F(t_i, \delta, \psi)\tau_i}, \tau_i \le \widetilde{T} - t_i, \\ \dfrac{J_1 + J_2}{F(t_i, \delta, \psi)\tau_i}, \tau_i \ge \widetilde{T} - t_i \end{cases}$$

kur $J_1 = \theta \int_{\widetilde{T}}^{T} D(t, T^*, T^*)\left(-B\left(t, T^*, T^*\right)\right) e^{-\theta(T^* - T)} dT^*$,

$$J_2 = \theta \int_{T}^{\infty} D(t, T^*, T)\left(-B(t, T^*, T)\right) e^{-\theta(T^* - T)} dT^*$$

un $F(t_i, \delta, \psi)$ iegūts no [33] vienādojuma.

Definē prognozes kļūdas vektoru:

$$\eta(t_i) = \widetilde{\overline{S}}(t) - \overline{S}(t_i, \delta(t_i|t_{i-1}), \psi) \qquad [55].$$

Novērojamo mainīgo prognozes dispersija ir:

$$F_{t_i} = \frac{\partial \widetilde{S}(t_i, \delta(t_i|t_{i-1}), \psi)}{\partial \delta} \sum\nolimits_{t_i|t_{i-1}} \frac{\partial \widetilde{S}(t_i, \delta(t_i|t_{i-1}), \psi)'}{\partial \delta} + H_{t_i} \qquad [56],$$

kur $\sum_{t_i|t_{i-1}}$ ir faktora δ prognozes dispersija laika momentā t_{i-1}:

$$\sum_{t_i|t_{i-1}} = X(t_i, t_{i-1}) \sum_{t_{i-1}|t_{i-1}} X(t_i, t_{i-1})' + \Gamma_{t_i}$$ [57],

H_{t_i} ir vektora $\eta(t_i)$ kovariācijas matrica, $H_{t_i} = \sigma_\eta^2 I$, kur I ir vienības matrica.

Izmantojot par laika momentu t_i pieejamo informāciju, iegūst šādu atjauninātu stāvokļa vienādojumu:

$$\delta(t_i|t_i) = \delta(t_i|t_{i-1}) + \sum_{t_i|t_{i-1}} \cdot \frac{\partial \widetilde{S}(t_i, \delta(t_i|t_{i-1}), \psi)}{\partial \delta} F_{t_i}^{-1} \eta(t_i)$$ [58],

bet šā vērtējuma dispersiju izsaka:

$$\sum_{t_i|t_i} = \left(\sum_{t_i|t_{i-1}}^{-1} + \frac{\partial \widetilde{S}'(t_i, \delta(t_i|t_{i-1}), \psi)}{\partial \delta} H_{t_i}^{-1} \frac{\partial \widetilde{S}(t_i, \delta(t_i|t_{i-1}), \psi)}{\partial \delta} \right)^{-1}$$ [59].

Tāpēc rekursīvās novērtēšanas metodi var izmantot tādā pašā veidā kā vispārpieņemtajā Kalmana filtra pieejā. Izvēloties jebkādas sākotnējās vērtības δ_0 un $\sum_0$ un izmantojot [54]–[59] formulu, prognozes kļūdas $\eta(t_i)$ un to kovariācijas matricas F_{t_i} var aprēķināt rekursīvi.

Definē logaritmiskās ticamības funkciju:

$$L = \sum_{i=1}^{N} -\frac{1}{2}\left(\log\left|F_{t_i}\right| + \eta'(t_i) F_{t_i}^{-1} \eta(t_i)\right)$$ [60]

un, lietojot dažas skaitliskās metodes, aprēķina parametra vektoru ψ, kas maksimizē ticamības funkciju. Šā procesa vissarežģītākais uzdevums ir aprēķināt funkciju S un tās katra soļa atvasinājumus, jo S definē logaritms no nenoteiktiem integrāļiem [33] vienādojumā, kas ir samērā nelineāras funkcijas. Skaitlisku paņēmienu izmantošana ir absolūti nepieciešama.

LITERATŪRA

1. ABRAMOWITZ, Milton, STEGUN, Irene A. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications : New York, 1965.

2. BATES, David S. *Financial Markets' Assessment of EMU*. NBER Working Paper, No. 6874, January 1999.

3. CORZO, Santamaria Teresa, SCHWARTZ, Eduardo S. Convergence within the EU: Evidence from Interest Rates. *Economic Notes*, vol. 29, No. 2, July 2000, pp. 243–266.

4. De GRAUWE, Paul. *Forward Interest Rates as Predictors of EMU*. CEPR Discussion Paper, No. 1395, May 1996.

5. DUFFIE, Darrell. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press : Princeton, 2001.

6. DUFFIE, Darrell, SINGLETON, Kenneth J. *Credit Risk.* Princeton University Press : Princeton, 2003.

7. FAVERO, Carlo Ambrogio, GIAVAZZI, Francesco, IACONE, Fabrizio, TABELLINI, Guido. *Extracting Information from Asset Prices: the Methodology of EMU Calculators*. CEPR Discussion Paper, No. 1676, July 1997.

8. HAMILTON, James D. *Time Series Analysis*. Princeton University Press : Princeton, 1994.

9. HARVEY, Andrew C. *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press : New York, 1989.

10. KARATZAS, Ioannis, SHREVE, Steven E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag : Berlin, 1991.

11. LANDO, David. On Cox Processes and Credit Risky Securities. *Review of Derivatives Research*, vol. 2, No. 2–3, December 1998, pp. 99–120.

12. LUND, Jesper. Five Essays in Financial Econometrics and the Term Structure of Interest Rates, Ph. D. Dissertation. Department of Finance, the Aarhus School of Business, July 1997 [skatīts 2008. gada 24. oktobrī]. Pieejams: *http://www.jesperlund.com/thesis/*.

13. LUND, Jesper. A Model for Studying the Effect of EMU on European Yield Curves. *European Finance Review*, vol. 2, No. 3, 1999, pp. 321–363.

14. PROTTER, Philip E. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer-Verlag : Berlin, 2005.

15. REVUZ, Daniel, YOR, Marc. *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag : Berlin, 1999.

16. VASICEK, Oldrich. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, vol. 5, issue 2, November 1977, pp. 177–188.